4/9/2016

• → • Λέσχη Μαθηματικών Αύριο στις 14:30

<u>Παρατήρ.</u> κλάσεις διαγωνίσιμων πινάκων

1. Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ διαγώνιος. Τότε A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$

2 (πολύ σημαντικό ~~Σ~~ στη Γεωμετρία) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός. Δηλαδή $A^t = A$. Τότε A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$

Εσωτερικά Γινόμενα

Ορισμός. Έστω V διαν. χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$ και $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση. Η $\langle , \rangle$ λέγεται εσωτερικό γινόμενο στο V, και το $(V, \langle , \rangle)$ λέγεται Ευκλείδιος χώρος, ή χώρος εσωτερικού γινομένου αν

i) Η <,> είναι συμμετρική, δηλ $<w,u> = <u,w>$ ∀ $u,w \in V$

ii) Η <> είναι ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΗ, δηλαδή

$<v, w+z> = <v,w> + <v,z>$

$<v, \lambda \cdot w> = \lambda <v,w>$

$<v+z, w> = <v,w> + <z,w>$

$<\lambda v, w> = \lambda <v,w>$

Με άλλα λόγια αν σταθεροποιήσουμε ένα διάνυσμα v στη μία μεταβλητή η απεικόνιση $<v,\cdot> : V \to \mathbb{R}$ με $(<v,\cdot>)(w) = <v,w>$ είναι γραμμική και ~~[illegible]~~ για κάθε $w \in V$, η απεικόνιση $<\cdot,w> : V \to \mathbb{R}$ με $(<\cdot,w>)(v) = <v,w>$ είναι γραμμική.

π.χ.

Η απεικόνιση $<,> : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $<x,y> = x \cdot y$, για $x,y \in \mathbb{R}$ είναι διγραμμική

Η <,> είναι

iii) Θετικά Ορισμένη, δηλ $<v,v> \geq 0$ ∀ $v \in V$ και $<v,v> = 0$ αν και μόνο αν $v = 0_V$

πχ Κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε $<,> : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής

Έστω $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Θέτουμε $<v, w> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$.

πχ

$(n = 3 \quad v = (1, -1, 5), \; w = (2, 1, -1)$

$<v, w> = 1 \cdot 2 + (-1)1 + 5(-1) = -4 \in \mathbb{R})$

Ισχυρισμός $<,>$ είναι εσωτερικό γινόμενο στο $V = \mathbb{R}^n$

Αποδ

Συμμετρία $<(y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n)> =$

$= y_1 x_1 + \dots y_n x_n = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n =$

$= <(x_1, \dots, x_n), (y_1 \dots y_n)>$

Διγραμμικότητα

$<(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) + (y_1', \dots, y_n')> =$

$= <(x_1, \dots, x_n)(y_1 + y_1', y_2 + y_2', \dots, y_n + y_n')>$

$= \sum_{i=n}^{n} x_i (y_i + y_i') = \sum_{i=1} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i' =$

$= <v, w> + <v, z>$.

$<v, \lambda w> = <(x_1, \dots, x_n), (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n)> =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i (\lambda y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \lambda <v, w>$

Έστω $v, w, z \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε

λόγω συμμετρ. διγραμ. συμμετρ.

$<v+z, w> \overset{\downarrow}{=} <w, v+z> \overset{\downarrow}{=} <w, v> + <w, z> =$

$= <v, w> + <z, w>$

Ομοίως για $\lambda \in \mathbb{R}$

$<\lambda v, w> \underset{συμμ}{=} <v, \lambda v> \underset{διγραμ}{=} \lambda <w, v> \overset{συμμετρία}{=}$

$= \lambda <v, w>$

Άρα $<,>$ είναι διγραμμική

Θετικά ορισμένο

Έστω $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε $<v, v> =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0_{\mathbb{R}}$ και $<v, v> = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v = 0_{\mathbb{R}^n} \ (= (0_{\mathbb{R}}, \dots, 0_{\mathbb{R}}))$

Επομένως δο το κανονικό εσωτ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ είναι πράγματι εσωτ. γινόμενο

Ερώτημα Έστω $<,> : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow[με]{} \mathbb{R}$

$<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)> = x_1 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$

✓ 1) είναι η $<,>$ διγραμμική;

× 2) είναι η $<,>$ συμμετρική;

× 3) είναι η $<,>$ θετικά ορισμένη;

× 4) είναι η $<,>$ εσωτ. γινόμενο;

1) $<(x_1, x_2, x_3), \cdot> \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$<\cdot, (y_1, y_2, y_3)> : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

1) Η $\langle , \rangle$ είναι διγραμμική (Αποδ. Άσκηση)

2) Η $\langle , \rangle$ ΔΕΝ είναι συμμετρική γιατί

$$\langle (\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{0}, \underset{x_3}{0}), (\underset{u_1}{0}, \underset{u_2}{1}, \underset{u_3}{0}) \rangle = 1_{\mathbb{R}} \text{ ενώ } \langle (0,1,0),(1,0,0) \rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Άρα η $\langle , \rangle$ δεν είναι εσωτερικό γινόμενο.

3) Η $\langle , \rangle$ Δεν είναι θετικά ορισμένη, γιατί αν $v = (1,-1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \in \mathbb{R}$, $\langle v, v \rangle = -1 < 0$

π.χ. (κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}_n[x]$ ← πολυώνυμα $/\mathbb{R}$ βαθμού $\leq n$

Ορισμός

Έστω $n \geq 1$ και $V = \mathbb{R}_n[x]$. Ορίζουμε $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ως εξής:

Έστω $v = f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, $w = g(x) \in \mathbb{R}_n[x]$. Θέτουμε $\langle v, w \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

π.χ. αν $v = x$, $w = x^3$

$$\langle v, w \rangle = \int_0^1 x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{0}{5} = \frac{1}{5} \in$$

$\mathbb{R}$.

Ισχύει $\langle \rangle$ εσωτ. γινόμενο στο V.

Αποδ.

i) Συμμετρία $\langle v, w \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx =$

$$\int_0^1 g(x) f(x)\, dx = \langle w, v \rangle .$$

Διγραμμικότητα. Έστω $v = f(x)$, $w = g(x)$, $z = h(x)$. Τότε

$$\langle v, w+z \rangle = \int_0^1 f(x)\cdot [g(x) + h(x)]\, dx =$$

$$= \int_0^1 [f(x) g(x) + f(x)\cdot h(x)]\, dx =$$

$$= \int_0^1 f(x) g(x)\, dx + \int_0^1 f(x) h(x)\, dx =$$

$= \langle v, w \rangle + \langle v, z \rangle$ Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες για την Διγραμμικότητα

Θετικά ορισμένο.

Υπενθ.

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε

a) Αν $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,1]$ τότε $\int_0^1 f(x)\, dx \geq 0$

b) Αν $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,1]$ και υπάρχει $\xi \in [0,1]$ με $f(\xi) > 0_{\mathbb{R}}$ τότε $\int_0^1 f(x)\, dx > 0$

Ισχυρ. <> Θετικά ορισμένο. Έστω $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$. Αν το δούμε σαν συνάρτηση $[0,1] \to \mathbb{R}$

Τότε είναι συνεχής.
Έχουμε $\langle v, v \rangle = \int_0^1 (f(x))^2 dx \geq 0_{\mathbb{R}}$ από (*)

Έστω τώρα $v \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}$. Θ.δ.ο $\langle v, v \rangle > 0_{\mathbb{R}}$.
Πράγματι, έστω ότι δεν ισχύει. Τότε (**)
έχουμε ότι $(f(x))^2 = 0_{\mathbb{R}}$ $\forall x \in [0,1]$.
Άρα $f(x) = 0_{\mathbb{R}}$ $\forall x \in [0,1]$. Αντίφαση, γιατί ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ έχει το πολύ $\deg f(x)$ ρίζες στο $\mathbb{R}[x]$, ενώ το $[0,1]$ έχει άπειρα στοιχεία.

Τώρα θα δούμε ότι ένα εσωτερικό γινόμενο στο V μας επιτρέπει να κάνουμε γεωμετρία στο V, δηλαδή να μιλάμε για μήκη, γωνίες, καθετότητα, τριγωνική ανισότητα, Π.Θ. κλπ. στο V.

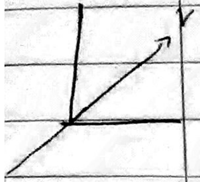
<u>Ορισμός</u>

Έστω $(V, \langle , \rangle)$ Χ.Ε.Γ (χώρος εσωτερικού γινομένου) και $v \in V$. Αφού $\langle , \rangle$ θετικά ορισμένη, έχουμε $\langle v, v \rangle \geq 0_{\mathbb{R}}$.
Ορίζουμε μήκος (ή νόρμα) $\|v\|$ του v ως εξής: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}$
(όπου φυσικά παίρνουμε τη θετική ρίζα)

<u>π.χ.</u> Έστω $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες (ή κανονικό) εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ και $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Έχουμε $||v|| = \sqrt{<v, v>} =$

$= \sqrt{<(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)>} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$



Γεωμετρικά: Η "στάθμη" αποτελεί απόσταση του διανύσματος v από την αρχή των αξόνων

Π.χ.

$V = \mathbb{R}_3[x]$ και $V = \mathbb{R}_3[x]$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $<f(x), g(x)> = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

και $v = x^2$. Υπολογίστε το $||v||$

Λύση

$$||v|| = \sqrt{<v, v>} = \sqrt{\int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx} =$$

$$\sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Πρόταση

Έστω $(V, <,>)$ χ.ε.γ. και $v \in V$. Τότε $||v|| = 0 \iff v = 0_V$

όπου στη διάνυσμα 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα. Όλα τα άλλα στοιχεία του V έχουν θετικό μήκος

Απόδ.

Αφού $<,>$ εσωτερ. γινόμενο έχουμε ότι

είναι θετικά ορισμένο Άρα $\langle v, v \rangle \geq 0_{\mathbb{R}}$ $\forall$ $v \in V$ και $\langle v, v \rangle = 0_{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $v = 0_V$